**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Санкт-Петербургский государственный**

**электротехнический университет**

**«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)**

**Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ**

отчет

**по практической работе №9**

**по дисциплине «Вычислительная математика»**

Тема: Самостоятельная разработка программы на одном из языков программирования

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Студент гр. 8381 |  | Киреев К.А. |
| Преподаватель |  | Щеголева Н.Л. |

Санкт-Петербург

2019

**Цель работы.**

Исследование различных методов интерполяции для неравноотстоящих узлов с последующей реализацией на одном из языков программирования.

**Основные теоретические положения.**

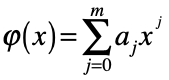
Пусть величина y является функцией аргумента x. Это означает, что любому значению x из области определения поставлено в соответствие значение y.

Однако на практике часто неизвестна связь между x и y, т.е. невозможно записать эту связь в виде некоторой зависимости . В других случаях при известной зависимости ее использование в практических задачах затруднительно (например, она содержит сложные, трудно вычисляемые выражения).

Наиболее распространенным и важным для практического использования случаем, когда вид связи между параметрами x и y неизвестен, является задание этой связи в виде некоторой таблицы , в которой дискретному множеству значений аргумента  поставлено в соответствие множество значений функции . Эти значения – либо результаты расчетов, либо экспериментальные данные. На практике могут понадобиться значения величины y и в других точках, отличных от узлов x. Таким образом, приходим к необходимости использования имеющихся табличных данных для приближенного вычисления искомого параметра y при любом значении (из некоторой области) определяющего параметра x, поскольку точная связь  неизвестна.

Этой цели служит задача о приближении (аппроксимации) функций: данную функциютребуется аппроксимировать (приближенно заменить) некоторой функцией  так, чтобы отклонение (в некотором смысле)  от  в заданной области было наименьшим. Функция при этом называется аппроксимирующей.

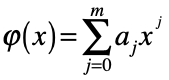
Для практики важен случай аппроксимации функции многочленом

 (1)

Этот случай, т.е. приближение многочленами, является одной из задач классического численного анализа. Рассмотрим аппроксимацию этого рода и методы ее реализации в вычислительных процедурах на ЭВМ. Коэффициенты  в процедурах подбираются так, чтобы достичь наименьшего отклонения многочлена от данной функции.

Если приближение строится на заданном дискретном множестве точек , то аппроксимация называется точечной. Одним из основных типов точечной аппроксимации является интерполирование, которое заключается в следующем: для данной функции строится многочлен, принимающий в заданных точках  те же значения , что и функция , т. е. 

При данной постановке задачи предполагается, что среди значений  нет одинаковых:  при . Точки называются узлами интерполяции, а многочлен  – интерполяционным многочленом. Близость интерполяционного многочлена к заданной функции состоит, таким образом, в том, что их значения совпадают на заданной системе точек (узлов).

Максимальная степень интерполяционного многочлена . В этом случае говорят о глобальной интерполяции, так как один многочлен  используется для интерполяции функции на всем рассматриваемом интервале изменения аргумента  Коэффициенты   многочлена  находят из системы уравнений  Можно показать, что при  эта система имеет единственное решение.

Возможны два случая задания функции точки xi располагаются на оси абсцисс неравномерно на различных расстояниях одна от другой – случай неравноотстоящих узлов; точки располагаются на оси абсцисс равномерно с фиксированным шагом – случай равноотстоящих узлов.

В каждом из указанных случаев для интерполирования функций применяются различные интерполяционные формулы.

**Интерполяционные формулы для неравноотстоящих узлов**

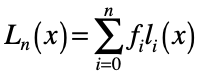
Пусть известны значения некоторой функции в  различных точках , которые обозначим следующим образом: 

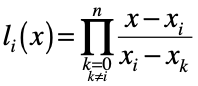
Указанные значения могут быть получены путем экспериментальных измерений или найдены с помощью достаточно сложных вычислений. В задаче интерполяции функции , как было сказано ранее, решается проблема приближенного восстановления значения функции в произвольной точке . Для этого строится алгебраический многочлен  степени , который в точках  принимает заданные значения, т.е.

 (2)

Следует заметить, что если точка  расположена вне минимального отрезка, содержащего все узлы интерполяции , то замену функции   на  также называют экстраполяцией.

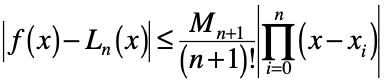
В общем случае доказано, что существует единственный интерполяционный многочлен n-й степени, удовлетворяющий условиям выше:

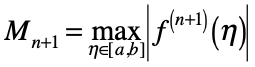
 (3)

 (4)

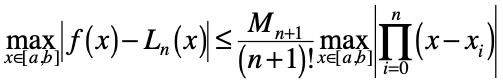
Данный интерполяционный многочлен, называется интерполяционным многочленом Лагранжа, а функции  – лагранжевыми коэффициентами или базисными полиномами.

Для оценки погрешности интерполяции (в частности, и экстраполяции) в текущей точке  – отрезок, содержащий все узлы интерполяции  и точку ) можно использовать соотношение

 (5)

где  – наибольшее абсолютное значение  производной интерполируемой функции в некоторой точке .

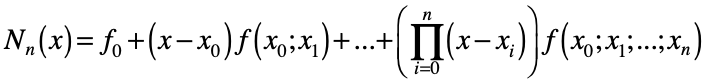
Оценить максимальную погрешность интерполяции на всем отрезке  можно с помощью соотношения

 (6)

Использование оценок погрешностей предполагает ограниченность   производной интерполируемой функции на отрезке , т.е. .

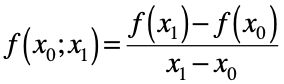
На практике вместо общей формы записи часто используются другие формы записи интерполяционного многочлена, более удобные для применения в конкретных ситуациях.

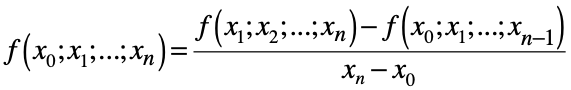
Интерполяционный многочлен Ньютона для неравноотстоящих узлов интерполяции имеет вид:

 (7)

где  - разделённая разность  порядка.

Вычисление разделённых разностей производится по соотношениям:

 (8)

 (9)

При использовании интерполяционного многочлена Ньютона изменение степени  требует только добавить или отбросить соответствующее число стандартных слагаемых, что удобно на практике. В то же время, непосредственное использование интерполяционного многочлена Лагранжа требует строить его заново при изменении .

В том случае, если требуется найти лишь численное значение интерполя-ционного многочлена а не его представление, может быть использована итерационно-интерполяционная схема Эйткена.

Пусть  - интерполяционный многочлен, определяемый парами , , , ... так, что .

Интерполяционные многочлены возрастающих степеней получают последовательно следующим образом:

,

,

...

,

...

.

**Постановка задачи.**

В ходе работы студенты должны самостоятельно разработать программу на одном из языков программирования, обеспечивающую решение одного из вариантов, полученного от преподавателя. Используя интерполяционную схему Эйткена и/или интерполяционную формулу Ньютона, необходимо вычислить значение в точке x функции, заданной таблицей.

Таблица 1 – Вариант задания к практической работе

|  |  |
| --- | --- |
| Значение по оси абсцисс | Значение по оси ординат |
| 0.0808 | -5.1498 |
| 0.5744 | -1.4717 |
| 0.9728 | -0.0566 |
| 1.0568 | 0.1041 |
| 2.1264 | -0.1244 |
| 2.6656 | -0.3707 |
| 3.5184 | 1.9823 |
| 4.4192 | 11.7392 |
| 4.9320 | 22.2733 |
| 5.3424 | 33.9977 |
| 5.9584 | 58.0655 |

**Выполнение работы.**

Была составлена подпрограмма-функция для вычисления значения в заданной точке по формуле Ньютона INEWTON и схеме Эйткина AITKEN.

Была составлена головная программа, содержащая обращение к соответствующим подпрограммам и осуществляющая печать результатов как на экран, так и в файл.

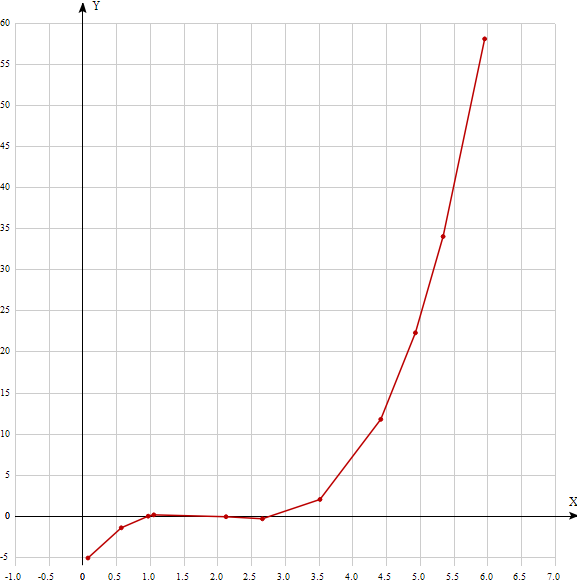
Были проведены вычисления по программе. Построен график полученной функции (множество точек, соединённых последовательно).

Рисунок 1 – График полученной функции

По результатам работы программы была построена таблица. В ней представлены результаты вычисления значения *f(x)* в заданной точке описанными методами интерполяции.

Таблица 2 – Значение функции в заданной точке

|  |  |
| --- | --- |
| Многочлен Ньютона | Многочлен Эйткена |
| -0.167729 | -0.167729 |

**Выводы.**

В ходе лабораторной работы были изучены интерполяционные формулы Ньютона, Эйткена. Все вышеперечисленные методы вычисления значения интерполяционного многочлена в точке, отличной от узлов интерполяции, а также значение, вычисленное с помощью wolfram alpha, дали почти одинаковый результат, что свидетельствует об отсутствии ошибок в процессе вычисления.

Приложение А

ТЕКСТ ОСНОВНОЙ ПРОГРАММЫ

#include <iostream>

#include <fstream>

using namespace std;

ofstream ff("output.txt");

double x[11] = { 0.0808, 0.5744, 0.9728, 1.0568, 2.1264, 2.6656, 3.5184, 4.4192, 4.9320, 5.3424, 5.9584 };

double y[11] = { -5.1498, -1.4717, -0.0566, 0.1041, -0.1244, -0.3707, 1.9823, 11.7392, 22.2733, 33.9977, 58.0655 };

double f(int k, int p) // разделенная разность порядка k

{

    switch(k)

    {

        case 0: return y[0];

        case 1: return (y[p + 1] - y[p]) / (x[p + 1] - x[p]);

        default: return (f(k - 1, p + 1) - f(k - 1, p)) / (x[p + k] - x[p]);

    }

}

double INEWTON(int n)

{

    double s = 0; // частичная накопленная сумма

    double p; // базисный полином Ньютона

    for (int i = 0; i < n; i++)

    {

        p = 1;

        for (int j = 0; j < i; j++)

            p = p \* (0.9248 - x[j]);

        s = s + p \* f(i, 0);

    }

    return s;

}

double AITKEN(int n, int k) // Y[k-n..k]

{

    if (n == 0)

        return y[k];

    else

        return ((0.9248 - x[k - n]) \* AITKEN(n - 1, k) - (0.9248 - x[k]) \* AITKEN(n - 1, k - 1)) / (x[k] - x[k - n]);

}

int main()

{

    cout << "Результат вычисления по интерполяционной формуле Ньютона в точке 0.9248: " << INEWTON(11) << endl << endl;

    ff << "Результат вычисления по интерполяционной формуле Ньютона в точке 0.9248: " << INEWTON(11) << endl << endl;

    cout << "Результат вычисления по интерполяционной схеме Эйткена в точке 0.9248: " << AITKEN(10, 10) << endl << endl;

    ff << "Результат вычисления по интерполяционной схеме Эйткена в точке 0.9248: " << AITKEN(10, 10) << endl << endl;

    return 0;

}